Nafouz

**التمرين الأول : (04 نقاط)**

1) احسب القاسم المشترك الأكبر للعددين $4^5-1$ و $4^6-1$.

2) نعتبر المتتالية $(u_n)$ المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $u_0=0$ و $u_1=1$ و من اجل كل عدد طبيعي $n$ :

$u_{n+2}=5u_{n+1}-4u_n$

أ) احسب الحدود: $u_2$ ، $u_3$ و $u_4$.

ب) برهن بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي $n$ : $u_{n+1}=4u_n+1$.

ج) برهن بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي $n$ فان $u_n$ عدد طبيعي، ثم استنتج $PGCD(u_n;u_{n+1})$.

3) لتكن $(v_n)$ متتالية عددية معرفة من اجل كل عدد طبيعي $n$ بـ : $v_n=u_n+\frac{1}{3}$

أ) بين أن $(v_n)$ متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول.

ب) اكتب بدلالة العدد الطبيعي $n$ عبارة $v_n$ ثم عبارة $u_n$.

ج) عين من اجل كل عدد طبيعي $n$ : $PGCD(4^{n+1}-1;4^n-1)$.

**التمرين الثاني : (04 نقاط)**

في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ نعتبر سطح الكرة $(S)$ التي $x^2+y^2+z^2-4x+2y-4=0$ معادلة ديكارتية له و المستقيم $(D)$ المعرف بالتمثيل الوسيطي

$$\begin{cases} x=-1+6t \\ y=6-5t \\ z=1-2t \end{cases}$$ حيث $t$ عدد حقيقي.

1) بين أن: $(D)\cap(S)=\varnothing$ .

2) أعط تمثيلا ديكارتيا للمستقيم $(D)$ .

3) حدد معادلة ديكارتية لكل مستوي من المستويين $(P_1)$ و $(P_2)$ المماسين لسطح الكرة $(S)$ و اللذان يشملان المستقيم $(D)$.

4) احسب إحداثيات النقطتين $A$ و $B$ نقطتا تماس كل من $(P_1)$ و $(P_2)$ مع $(S)$ على التوالي.

**التمرين الثالث: (05 نقاط)**

$I$. المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ لتكن $p$ النقطة ذات اللاحقة $Z_p = 10$ و $(\Gamma)$ الدائرة ذات القطر $[OP]$ نسمي $\Omega$ مركز الدائرة $(\Gamma)$. نعتبر النقط $C,B,A$ التي لاحقاتها على الترتيب $Z_A = 5+5i$ , $Z_B = 1+3i$ و $Z_C = 8-4i$.

1) بين أن النقط $C,B,A$ تنتمي إلى الدائرة $(\Gamma)$ (يطلب إنشاء الشكل).

2) لتكن النقطة $D$ ذات اللاحقة $Z_D = 2+2i$. بين ان النقطة $D$ هي المسقط العمودي للنقطة $O$ على المستقيم $(BC)$.

$II$. من اجل كل نقطة $M$ من المستوي مختلفة عن $O$ ذات اللاحقة $z$ نرفق النقطة $M'$ ذات اللاحقة $z'$ حيث : $z' = \dfrac{20}{\overline{z}}$ علما أن $\overline{z}$ يرمز إلى مرافق $z$.

1) بين أن النقط $O$ ، $M$ و $M'$ على استقامة واحدة.

2) لبكن $(\Delta)$ المستقيم ذو المعادلة $x = 2$ و $M$ نقطة من $(\Delta)$ ذات اللاحقة $z$.

أ) تحقق أن: $z+\overline{z} = 4$ .

ب) عبر عن $z'+\overline{z'}$ بدلالة $z$ و $\overline{z}$ ، ثم استنتج أن : $5(z'+\overline{z'}) = z'\overline{z'}$ .

ج) استنتج أن $M'$ تنتمي إلى تقاطع المستقيم $(OM)$ و الدائرة $(\Gamma)$ ثم علم النقطة $M'$ في الشكل .

**التمرين الرابع: ( 07 نقاط)**

من اجل كل عدد طبيعي غير معدوم $n$ نعتبر الدالة العددية $f_n$ للمتغير الحقيقي $x$ و المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f_n(x) = \dfrac{4e^{nx}}{e^{nx}+7}$. و نرمز بـ : $(C_n)$ إلى المنحنى الممثل للدالة في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

$I$. دراسة الدالة $f_1$ المعرفة على بـ : $f_1(x) = \dfrac{4e^{x}}{e^{x}+7}$

1) أ) تحقق انه من اجل كل عدد حقيقي $x$ فان : $f_1(x) = \dfrac{4}{1+7e^{-x}}$ .

ب) احسب نهايتي الدالة $f_1$ عند $-\infty$ و عند $+\infty$ و فسر هندسيا النتائج المحصل عليها.

2) أ) بين أن الدالة $f_1$ متزايدة تماما على $\mathbb{R}$ و شكل جدول تغيراتها.

ب) استنتج انه من اجل كل عدد حقيقي $x$ فان : $0 < f_1(x) < 4$ .

3)أ) بين أن النقطة $I_1$ ذات الإحداثيتين $(\ln(7);2)$ مركز تناظر للمنحنى $(C_1)$.

ب) اكتب معادلة لــ $(T_1)$مماس المنحنى $(C_1)$ في النقطة $I_1$.

ج) أنشئ المماس $(T_1)$ و المنحنى $(C_1)$.

4)احسب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى $(C_1)$ و المستقيمات التي معادلاتها:

$y=0$ ، $x=1$ و $x=3$.

$II$. دراسة بعض خواص الدالة : $f_n$

1) بين انه من اجل كل عدد حقيقي $x$ فان: $f_n(x)=f_1(nx)$ و استنتج اتجاه تغير الدالة $f_n$.

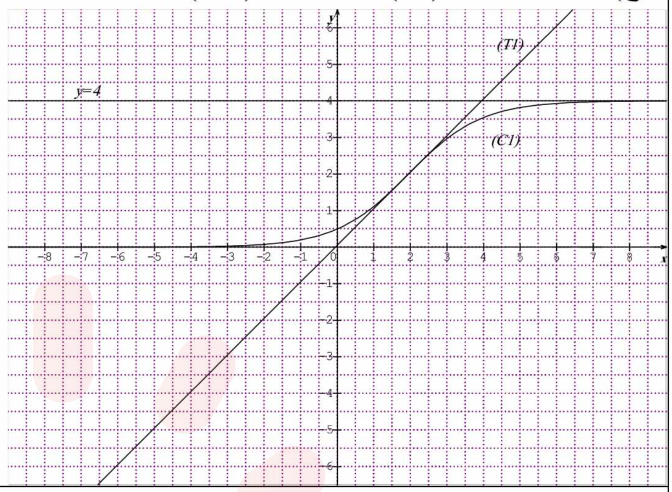
2) اثبت انه من اجل كل عدد طبيعي غير معدوم $n$ فان النقطة $A\left(0;\frac{1}{2}\right)$ تنتمي إلى المنحنى $(C_n)$.

| العلامة المجزأة | عناصــــــــــــر الإجابــــــــــة |
|---|---|
| 0.5 | **التمرين الأول: ( 04 نقاط)**<br>1-) حساب : $PGCD\ (4^{5}-1, 4^{6}-1)$ : باستخدام خوارزمية اقليدس أو بالتحليل : $PGCD\ (4^5-4,1^{6}-1) = 3$ |
| 0.5 | 2-) أ– حساب الحدود نجد : $U_2 = 5$ ؛ $U_3 = 21$ و $U_4 = 85$ . |
| 0.5 | ب-) نتحقق من صحة $P(0)$ : $U_0 = 0$ و $U_1 = 1$ ومنه $U_1 = 4U_0 + 1$ اذن $P\ (0)$ صحيحة<br>نفرض أن $P(n)$ صحيحة أي $U_{n+1} = 4U_n + 1$ ومنه $U_{n+2} = 4U_n + 1$ أي $P(n+1)$ صحيحة |
| 0.5 | ج-) لدينا من أجل $n = 0$ لدينا $U_0 = 0$ و $0 \in \mathbb{N}$ اذن $P(0)$ صحيحة ؛ و بما أن $4 \in \mathbb{N}$ و $U_n \in \mathbb{N}$<br>فإن : $(4U_n + 1) \in \mathbb{N}$ أي $U_{n+1} \in \mathbb{N}$ اذن $P(n+1)$ صحيحة . |
| 0.5 | استنتاج $PGCD(U_n, U_{n+1})$ : من العلاقة : $U_{n+1} = 4U_n + 1$ نستنتج أن : $U_{n+1} - 4U_n = 1$<br>اذن حسب"مبرهنة بيزو Beuzout "فإن العددان : $U_n$ و $U_{n+1}$ أوليان فيما بينهماأي1=)<br>$PGCD(U_n, U_{n+1}$ |
| 0.5 | 3-) أ– لدينا : $V_n = U_n + \frac{1}{3}$ و منه $V_{n+1} = (4U_n + 1) + \frac{1}{3}$ ومنه $V_{n+1} = 4V_n$<br>اذن $(V_n)$ هي متتالية هندسية أساسها $q = 4$ وحدها $V_n = \frac{1}{3}$ |
| 0.5 | -ب) من اجل من أجل كل عدد طبيعي $V_n = \frac{1}{3} \times 4^n$ و منه من أجل كل عدد طبيعي n :<br>$U_n = \frac{1}{3}(4^n - 1)$ |
| 0.5 | - ج) تعيين $PGCD\ (4^{n+1} - 1\ , 4^n - 1)$ :<br>لدينامن الجواب (3-ب) : $U_n = \frac{1}{3}(4^n - 1)$ أي $3U_n = 4^n - 1$ ومنه $3U_{n+1} = 4^{n+1} - 1$<br>اذن : $PGCD(4^{n+1} - 1\ , 4^n - 1) = PGCD(3U_{n+1}, 3U_n)$<br>$= 3 \times PGCD(U_{n+1}, U_n)$<br>اذن : $PGCD(4^{n+1} - 1, 4^n - 1) = 3$ |
| | |
| | **التمرين الثاني : ( 04 نقاط)** |
| 0.5 | 1-) أ– $(S) :\ (x - 2)^2 + (y + 1)^2 + Z^2 = 9$<br>اذن $(S)$ سطح كرة مركزها $\Omega\ (2, -1\ ,0\ )$ و نصف قطرها $R = 3$ . |

| | |
|---|---|
| 0.5 | ب-)بتعويض التمثيل الوسيطي في معادلة ( S) نحصل على المعادلة : $65t^2 - 110t + 50 = 0$<br>بما أن : $\Delta < 0$ لا يوجد حلول إذن $(S) \cap (D) = \emptyset$ |
| 0.5 | 2-) لدينا : $\frac{x+1}{6} = \frac{6-y}{5} = \frac{1-Z}{2}$<br>أي $\begin{cases} 5(x+1) = 6(6-y) \\ \text{و} \\ 2(6-y) = 5(1-Z) \end{cases}$<br>نجد : $(D): \begin{cases} 5x + 6y - 31 = 0 \\ -2y + 5Z + 7 = 0 \end{cases}$ |
| 0.5 | 3-)معادلة المستوي$(P_\lambda)$الذي يشمل المستقيم(D)من الشكل:<br>$5x + 6y - 31 + \lambda(-2y + 5Z + 7) = 0$<br>أي : $(P_\lambda): \ 5x + (6 - 2\lambda)y + 5\lambda Z + 7\lambda - 31 = 0$ مع $\lambda$ وسيط حقيقي |
| 01 | بحيث : $d(\Omega, (P_\lambda)) = R$ أي : $\frac{\lvert 10-6+2\lambda+7\lambda-31 \rvert}{\sqrt{(5)^2+(6-2\lambda)^2+(5\lambda)^2}} = 3$<br>أي : $9\lvert\lambda - 3\rvert = 3\sqrt{29\lambda^2 - 24\lambda + 61}$<br>أي : $2\lambda^2 + 3\lambda - 2 = 0$ نجد : $(\lambda_1 = -2$ أو $\lambda_2 = \frac{1}{2})$<br>اذن : $(P_1) = x + 2y - 2Z - 9 = 0$ و $(P_2): \ 2x + 2y + Z - 11 = 0$ |
| 0.5 | 4-) أ- ) تقاطع $(P_1)$ مع ( S) : شعاع ناظمي لـ $(P_1)$ هو $\overrightarrow{n_1}(1,2,-2)$<br>$(\Delta)$ يشمل $\Omega$ و يعامد $(P_1)$ أي $\overrightarrow{\Omega M} = \alpha\, \overrightarrow{n_1}$ مع $\alpha \in \mathbb{R}$ أي $\begin{cases} x = \alpha + 2 \\ y = 2\alpha - 1 \\ Z = -2\alpha \end{cases}$<br>بالتعويض في معادلة $(P_1)$ نحصل على المعادلة : $9\alpha - 9 = 0$ يكافئ $\alpha = 1$ و بالتالي $A(3, 1, -2)$ |
| 0.5 | ب-) تقاطع $(P_2)$ مع (S) : شعاع ناظمي لـ $(P_2)$ هو $\overrightarrow{n_2}(2,2,1)$<br>$(\Delta')$ يشمل $\Omega$ و يعامد $(P_2)$ أي $\overrightarrow{\Omega M} = k\overrightarrow{n_2}$ مع $k \in \mathbb{R}$ أي $\begin{cases} x = 2k + 2 \\ y = 2k - 1 \\ Z = k \end{cases}$<br>بالتعويض في معادلة $(P_2)$ نحصل على المعادلة : $9k - 9 = 0$ يكافئ $k = 1$ و بالتالي $B(4, 1, 1)$ |
| | |
| | **التمرين الثالث : ( 05 نقاط )** |
| 0.75 | I) 1-) بما أن $\Omega A = \lvert 5i \rvert = 5$ و $\Omega B = \lvert -4 + 3i \rvert = 5$ و $\Omega C = \lvert 3 - 4i \rvert = 5$<br>اذن النقط A , B و C تنتمي إلى الدائرة $(\Gamma)$ ذات القطر [ O P ] . |
| 0.25 | * إنشاء الشكل : تمثيل النقط : $\Omega$ , A , B و C و الدائرة $(\Gamma)$ |
| 0.75 | 2-) لدينا من جهة $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} 7 \\ -7 \end{pmatrix}$ و $\overrightarrow{DB}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ اذن $\overrightarrow{BC} = -7\overrightarrow{DB}$ و منه $D \in (BC)$<br>و من جهة ثانية : $\overrightarrow{OD} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ أي $(OD) \perp (BC)$<br>نستنتج أن D هي المسقط العمودي للنقطة O على المستقيم (BC) |
| 0.25 | II) 1-) نفرض أن $M(x, y)$ نعلم أن $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) = arg\left(\frac{Z'}{Z}\right)$ علما أن $Z' = \frac{20}{\bar{Z}}$<br>و بالتالي : $arg\left(\frac{Z'}{Z}\right) = arg\left(\frac{20}{Z\bar{Z}}\right)$ |

| | |
|---|---|
| حيث : $Z\bar{Z'} = x^2 + y^2$ أي $Z\bar{Z} \in \mathbb{R}_*^+$ و بالتالي $\frac{20}{Z\bar{Z}} \in \mathbb{R}_*^+$<br>اذن $arg\left(\frac{Z'}{Z}\right) = 2k\pi$ مع k عدد صحيح و هذا يعني أن النقط : O , M , M ' على استقامة واحدة | 0.75 |
| 2-)أ) بما أن $M\in(\Delta)$ فإن : $Z = 2 + iy$ ومنه $\bar{Z} = 2 - iy$ بالجمع نجد : $Z + \bar{Z} = 4$ | 0.25 |
| ب) لدينا : $Z' + \bar{Z'} = \frac{20}{\bar{Z}} + \frac{20}{Z} = \frac{20Z+20\bar{Z}}{Z\bar{Z}} = \frac{20(Z+\bar{Z})}{Z\bar{Z}} = \frac{80}{Z\bar{Z}}$ | 0.5 |
| *) حسب الجواب السابق : $5(Z'+\bar{Z'}) = 5\left(\frac{80}{Z\bar{Z}}\right) = \frac{400}{Z\times\bar{Z}} = \frac{20}{Z}\times\frac{20}{\bar{Z}}$<br>اذن $5(Z'+\bar{Z}) = Z'\times\bar{Z'}$ | 0.5 |
| ج) من جهة حسب الجواب II – 1) النقط O , M و M ' في استقامية و منه $M' \in (OM)$<br>من جهة ثانية : $\Omega M' = \lvert Z'-5\rvert$ ( علما أن $Z\times\bar{Z} = \lvert Z\rvert^2$ .<br>و بالتالي $\Omega M'^2 = (Z'-5)(\overline{Z'-5})$<br>أي $\Omega M'^2 = Z'\bar{Z'} - 5(Z'+\bar{Z'}) + 25$<br>و بما أن $Z'+\bar{Z'} = 4$ و $Z'\times\bar{Z'} = 5(Z'+\bar{Z'})$<br>نحصل على : $\Omega M'^2 = 25$ أي $\Omega M' = 5$ و منه $M' \in (\Gamma)$ .<br>و بالتالي M ' تنتمي إلى تقاطع المستقيم (OM) و الدائرة (Γ) . | 01 |

| **التمرين الرابع : ( 07 نقاط )** | العلامة المجزأة |
|---|---|
| I) 1-) أ) التحقق من أجل كل $x$ من $\mathbb{R}$ : $f_1(x) = \frac{4e^x}{e^x(1+\frac{7}{e^x})}$ .<br>و هو المطلوب : $= \frac{4}{1+7e^{-x}}$ | 0.25 |
| ب) النهايات : $\lim_{x\to+\infty} f_1(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{4}{1+7e^{-x}}\right) = 4$<br>$\lim_{x\to-\infty} f_1(x) = \lim_{x\to-\infty}\frac{4e^x}{(e^x+7)} = 0$ | 0.5 |
| التفسير الهندسي : المنحنى $(\mathcal{C}_1)$ يقبل مستقيمين مقاربين أحدهما في جوار $-\infty$ معادلته y = 0 ( منطبق على محور الفواصل ) و الآخر معادلته y = 4 ( موازي لحامل محور الفواصل ) في جوار $+\infty$ . | 0.5 |
| 2-) –أ) الدالة $f_1$ قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ بحيث : من أجل كل $x$ من $\mathbb{R}$ : $f_1'(x) = \frac{28e^x}{(e^x+7)^2}$ . | 0.5 |
| إتجاه التغيير : من أجل كل $x$ من $\mathbb{R}$ فإن $f_1'(x) > 0$ و بالتالي الدالة $f_1$ متزايدة تماما على $\mathbb{R}$ . | 0.5 |
| ب) بما أن الدالة $f_1$ مستمرة و متزايدة تماما على $\mathbb{R}$ و حسب الجواب 1-ب) فإن صورة المجال $\mathbb{R}$ بالدالة $f_1$ هو المجال ] 0 , 4 [ إذن من أجل كل $x$ من $\mathbb{R}$ : $0 < f_1(x) < 4$ . | 0.5 |
| 3-) –أ) نضع $a = \ln 7$ و $b = 2$ أي $2a = 2\ln 7$ و $2b = 4$ ؛ من أجل كل $x$ من $\mathbb{R}$ فإن :<br>$(2\ln 7 - x) \in \mathbb{R}$ و $f_1(2\ln 7 - x) = \frac{4e^{2\ln 7-x}}{e^{2\ln 7-x}+7} = \frac{28}{7+e^x}$<br>بالجمع نجد : $f_1(2\ln 7-x)+f_1(x) = \frac{28}{7+e^x}+\frac{4e^x}{7+e^x} = 4$ أي<br>$f_1(2a-x)+f_1(x) = 2b$<br>و هذا يعني أن النقطة $I_1(\ln 7 , 2)$ هي مركز تناظر للمنحنى $(\mathcal{C}_1)$ . | 0.75 |

| | |
|---|---|
| 0.25 | -ب) معادلة المماس $(T_1)$ : $(T_1)$ : $y = f_1'(\ln 7)(x - \ln 7) + f_1(\ln 7)$<br>نجد : $(T_1)$: $y = x - \ln 7 + 2$ |
| 0.75 | -ج) انشاء المماس $(T_1)$ و المنحنى $(\mathcal{C}_1)$<br> |
| 0.5 | 4-) حساب المساحة $\mathcal{A}$ : الدالة f مستمرة و موجبة على المجال [1,3] إذن :<br>$\mathcal{A} = \int_1^3 f_1(x)dx = 4\int_1^3 \frac{e^x}{e^x+7}dx = [4\ln(e^x+7)]_1^3$ Ua |
| 0.5 | أي : $\mathcal{A} = 4\ln(e^3+7) - 4\ln(e^1+7)$ Ua أو $\mathcal{A} = 4\ln\left(\frac{e^3+7}{e^1+7}\right)$ Ua . |
| 0.5 | الجزء II) 1-) من أجل كل عدد حقيقي $x$ فإن : $f_n(x) = \frac{4e^{x}}{e^{nx}+7}$<br>و لدينا من أجل كل $x$ من $\mathbb{R}$ : $f_1(x) = \frac{4e^x}{e^x+7}$ .<br>و من أجل كل عدد طبيعي $n$ غير معدوم : $f_1(nx) = \frac{4e^{nx}}{e^{nx}+7}$ .<br>أي : $f_1(nx) = f_n(x)$ |
| 0.5 | * اتجاه تغير الدالة $f_n$ : بما أن $f_n(x) = f_1(nx)$ و بوضع $U(x) = nx$<br>حيث($n \in \mathbb{N}^*$ أي $n > 0$)<br>فإن $f_n = f_1 \circ U$ و بما أن الدالة U متزايدة تماما على $\mathbb{R}$ فإن الدالة المركبة $f_n$ متزايدة تماما على $\mathbb{R}$ . |
| 0.5 | 2-) من أجل كل عدد طبيعي $n$ غير معدوم و من أجل كل عدد حقيقي $x$ فإن :<br>$f_n(0) = \frac{4e^0}{e^0+7} = \frac{4}{1+7} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$<br>و بالتالي النقطة $A\left(0,\frac{1}{2}\right)$ تنتمي إلى $(\mathcal{C}_n)$ |